

PRIMER BLOQUE

A. Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica.

Determina los valores de los parámetros $k, p \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{k+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + p & \text{si } x > 0 \end{cases}$ verifique las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[-1, 3]$.

B. Determina los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = a \operatorname{sen}(x) + b \operatorname{cos}(x)$ pase por el punto $(\pi/4, \sqrt{2})$ y además cumpla que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = \pi/2$ sea 5. Calcula la derivada de orden 2008 de dicha función.

SEGUNDO BLOQUE

A. Enuncia la Regla de Barrow. Calcula la integral definida $\int_0^1 (x^2 + x)e^x dx$.

B. Calcula la integral $\int \frac{e^{2x} + e^x}{1 + e^{2x}} dx$. Indicación: Puede ayudarte hacer un cambio de variable adecuado.

TERCER BLOQUE

A. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Estudia, en función del parámetro λ , el rango de $A \cdot B$.
- Razona que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, y calcula dicha matriz inversa.

B. Considérese el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $A \cdot X = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2a & a & -1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

siendo a un parámetro real. Se pide:

- Clasifica el sistema en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
 - Para $a = 0$, obtén las soluciones mediante el cálculo $X = A^{-1} \cdot B$.
-

CUARTO BLOQUE

A. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + \sqrt{k}z = 3$ con k un número real positivo y $\pi_2 \equiv 3x + 4y = -5$:

- ¿Es posible hallar k para que π_1 y π_2 formen un ángulo de 60° ? En caso afirmativo, calcúlalo.
- ¿Es posible hallar k para que π_1 y π_2 sean perpendiculares? En caso afirmativo, calcúlalo.

B. Considera los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(3, 6, 3)$, $C(0, -1, 5)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ z - y = 4 \end{cases}$

- Halla un punto D de la recta r de forma que los puntos A, B, C y D estén en un mismo plano.
- Determina un punto D' de la recta r para que el volumen del tetraedro determinado por los vértices A, B, C y D' sea $10/3$.