PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS (2014).
Materia: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Esta prueba consta de dos bloques (A y B) de cuatro preguntas cada uno. El alumno debe contestar a uno de los bloques. Todos los ejercicios puntúan 2.5 puntos. Se puede utilizar la calculadora.

BLOQUE A

1. *a) Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcula* $AB^t + 2C$. *(1.5 puntos)*

b) Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *(1 punto)*

2. *Se ha estudiado, durante 10 meses, la concentración, en microgramos por metro cúbico, de una sustancia altamente contaminante en el agua de un embalse. Se ha observado que la concentración de dicha sustancia se puede aproximar por la función* $C(t) = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t + 50$ *con* $0 \leq t \leq 10$.

a) ¿Cuál era la concentración de la sustancia contaminante el primer mes del estudio (t=1)? (0.25 puntos)

b) ¿Cuándo se alcanzó la máxima concentración y cuál fue su valor? (1.25 puntos)

c) ¿Cuándo se alcanzó la mínima concentración y cuál fue su valor? (1 punto)

3. *Consideramos la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3}, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{5x^2}{x^2-1}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Se pide:

a) Determinar el dominio de $f(x)$. *(0.5 puntos)*

b) Estudiar si es continua en x =1. (1.25 puntos)

c) Calcular el límite de $f(x)$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$. *(0.75 puntos)*

4. *Una empresa tiene tres factorías para desarrollar un mismo producto. La probabilidad de que un producto sea de la factoría A es 0.8, de la factoría B es 0.15 y de la factoría C es 0.05. La proporción de productos defectuosos no es la misma en cada factoría, siendo 0.02 para los productos de la factoría A, 0.03 para la factoría B y 0.01 para la factoría C.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto haya sido hecho en la factoría A y sea defectuoso? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto no sea defectuoso? (1 punto)

c) Si elegimos un producto al azar y resulta defectuoso, ¿qué probabilidad hay de que sea de la factoría B? (1 punto)

BLOQUE B

1. *Un hotel tiene tres tipos de habitaciones: Habitaciones triples, dobles y sencillas. En total hay 36 habitaciones. El número de habitaciones dobles es igual a la suma del número de habitaciones sencillas y triples. El número de habitaciones sencillas es el doble que el número de habitaciones triples.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.(1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (1 punto)

2. *Dada la función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

a) Calcula los máximos y mínimos de la función. (1 punto)

b) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad. (1 punto)

c) Calcula los puntos de inflexión. (0.5 puntos)

3. *Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno. Obviamente los temas no pueden repetirse.*

a) ¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe cuatro temas, de aprobar el examen? (1 punto)

b) Si ha salido un tema y el alumno no se lo sabe, ¿qué probabilidad tiene el alumno de saberse el otro? (0.5 puntos)

c) ¿Qué probabilidad tiene un alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no? (1 punto)

4. *Una empresa sabe que el tiempo que tardan sus empleados en realizar una determinada tarea sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma = 4$ *minutos. Se eligen al azar 10 empleados y se contabiliza el tiempo que tardan en realizar dicha tarea, siendo estos tiempos: 40, 42, 48, 51, 52, 54, 59, 61, 63 y 70 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la duración media poblacional en realizar dicha tarea, con un nivel de confianza del 95 %. (1.5 puntos)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A-1. Solución:

a)

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ 0.25 puntos}$$

$$\text{A B}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 0.5 puntos}$$

$$2C = 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \textbf{ 0.25 puntos}$$

$$A\ B^T + 2C = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ 0.5 puntos}$$

b)

0.5 puntos por procedimiento si la matriz no es correcta y 1 punto si matriz correcta.

$$\frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A-2. Solución:

a)

$C(t=1) = \frac{1}{3} - 5 + 16 + 50 = \frac{184}{3} = 61{,}333$ microgramos por metro cúbico, 0.25 puntos.

b y c)

$C(t) = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t + 50\,, \quad 0 \leq t \leq 10$

$C'(t) = t^2 - 10t + 16 \qquad 0{,}25\ puntos$

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow\ t = 2,\ t = 8 \qquad 0{,}25\ puntos$

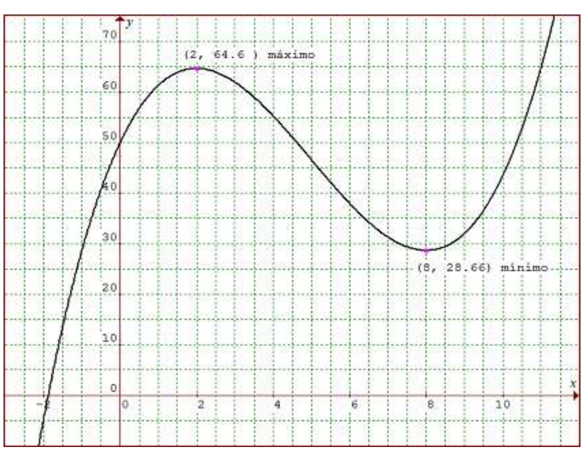
$C''(t) = 2t - 10 \quad (0{,}25\ puntos)$

$C''(t=2) = -6 < 0\ (0{,}25\ puntos) \Rightarrow (2,\ C(2) = \frac{194}{3} = 64{,}66)$ *es un máximo de la función*

El segundo mes alcanza la concentración más alta y asciende a $64{,}66\ \ \mu g/m^3$ $\qquad 0{,}5\ \ puntos$

$C''(t=8) = 6 > 0\ (0{,}25\ puntos) \Rightarrow\ (8,\ C(8) = \frac{86}{3} = 28{,}666\ )$ *es un mínimo de la función*

El octavo mes se registra la mínima concentración y es de $28{,}666\ \ \mu g/m^3$ $\qquad 0{,}5\ puntos$



A-3. Solución:

a) Para el primer trozo el dominio es todos los $x \leq 1$ donde no se anule el denominador por ser una función racional. El denominador se anula para $x = -3$ luego no está definida en $x = -3$.

Para el segundo trozo al ser una función racional, serán todos menos en los que se anula el denominador. El denominador se anula para $x = 1$ y $x = -1$. Pero este trozo de función solamente es para los valores mayores que 1.

El dominio es $R \backslash \{-3\}$.

(0.5 puntos)

b)

$f(1) = -1/4$ (0.25 puntos)

$lim_{x \to 1^-} f(x) = -1/4$ (0.25 puntos)

$lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ (0.25 puntos)

No existe este límite por tanto, no es continua en $x = 1$. (0.5 puntos) (todo bien 1.25 puntos)

c)

$lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{x^2-1} = 5$ (0.75 ptos)

A-4. Solución:

A=factoría A; B=factoría B; C=factoría C;

D=defectuoso

P(A)=0.8; P(B)=0.15; P(C)=0.05

P(D/A)=0.02; P(D/B)=0.03; P(D/C)=0.01

a)

P(A $\cap$ D)=P(D/A)*P(A)=0.8*0.02=0.016 (0.5 puntos)

b)

$P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}021 = 0{,}979$

P(D)=P(D $\cap$ A)+P(D $\cap$ B)+P(D $\cap$ C)=
=P(D/A)*P(A)+P(D/B)P(B)+P(D/C)*P(C)= 0.8*0.02+0.15*0.03+0.05*0.01=0.021 (1 punto)

c)

$P(B/D) = P(ByD)/P(D) = (P(D/B) * P(B))/P(D) = 0{,}2142857$

(1 punto)

B-1. Solución:

a) Por cada ecuación bien planteada 0.5 puntos

X= Nº de habitaciones triples Y= Nº de habitaciones dobles

Z= Nº de habitaciones sencillas

$$\begin{cases} x+y+z = 36 \\ y = x+z \\ z = 2x \end{cases}$$

b) Por resolver bien el sistema 1 punto (x=6, y=18, z=12)

B-2. Solución:

a) **f(x)= $\mathbf{x^3}$-6$\mathbf{x^2}$+9x+5**

$$\begin{aligned} &f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad 0{,}25\ puntos \\ &f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3 \quad 0{,}25\, puntos \\ &f''(x) = 6x - 12 \\ &f''(x=1) = -6 < 0 \Rightarrow (1,\ f(1) = 9)\, es\, un\, máximo \quad 0{,}25\, puntos \\ &f''(x=3) = 6 > 0 \Rightarrow\ (3,\ f(3) = 5)\ es\, un\, mínimo\ \ 0{,}25\, puntos \end{aligned}$$

$f''(x) = 6x - 12$

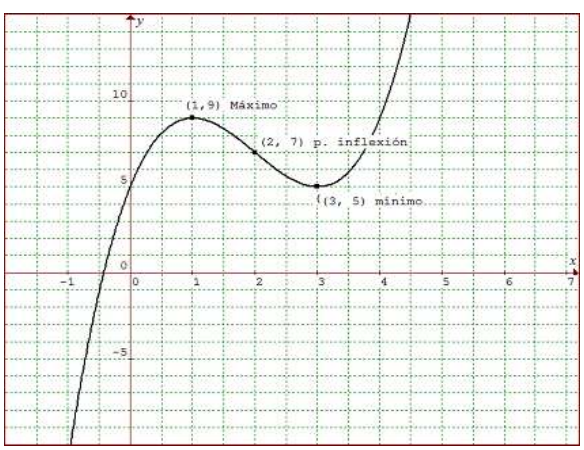
b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ **0.25 puntos**

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	-	$+$
f es	$\bigcap$	$\bigcup$

0.75 puntos por todo correcto

c)

$f'''(x=2) = 6 \neq 0$ (0.25 puntos) $\Rightarrow$ $(2,\ f(2) = 7)$ $es\, un\, punto\, de$ $\inf lexión$ $\quad 0{,}25\ \ puntos$



B-3. Solución:

S: Sabe el tema; NS: No sabe el tema

a) Para aprobar el examen tiene que saberse alguno de los dos. La probabilidad de que se sepa alguno es el complementario de que no sepa ninguno.

NS 1= No sabe el primero; NS 2= No sabe el segundo;

P(NS ninguno)=P(NS 1)*P(NS 2/ NS 1)=6/10*5/9=30/90=1/3

P(Sabe al menos 1 tema)=1-P(NS ninguno)=60/90=2/3 (1 punto)

b)

Esta probabilidad es de 4/9. (0.5 puntos)

c)

P(S uno)=P(NS 1 y S 2)+ P(S 1 y NS 2)=P(NS 1)*P(S 2/NS 1)+P(S 1)*P(NS 2/S 1)=6/10*4/9+4/10*6/9=24/90+24/90=48/90=8/15 (1 punto)

B.4 -Solución

a) La media muestral es:

$\bar{x} = \frac{40+42+48+51+52+54+59+61+63+70}{10} = 54\ minutos$ (0.25 puntos)

Del enunciado se deduce: $n = 10$ y $\sigma = 4$ mín $utos$

1- $\alpha = 0{,}95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1,96 (0.5 puntos)

IC= ($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 puntos)

IC= (54 - 1.96$\frac{4}{\sqrt{10}}$, $54 + 1{,}96 \frac{4}{\sqrt{10}}$) = (51.521, 56.479) (0.5 puntos)

b)

Tenemos dos opciones tomar una muestra mayor y la otra es utilizar un nivel de confianza menor, es decir, un α mayor. (0.5 puntos por cada una)