Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2021/2022

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & a+1 \\ ax & & +z & = & 0 \\ x & +y & +2z & = & 1 \end{cases}.$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

Solución:

a) En primer lugar, estudiamos el rango de la matriz de coeficientes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $|M| = 1 - a$ tenemos que el rango de M es 3 cuando $a \neq 1$, por lo que el sistema es compatible determinado. Cuando $a = 1$ el rango de M es 2 y el de la matriz extendida es también 2, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Criterios de corrección:

- Cálculo del determinante de M, 0, 25 puntos; obtener los valores de a, 0,25; discusión para $a = 1$, 0,75 puntos; discusión para $a \neq 1$, 0,50 puntos.

b) Para $a = 1$ tenemos un sistema compatible indeterminado (según el apartado anterior). Resolvemos en función de $z = t$:

$$\begin{aligned} x &= -t \\ y &= 1 - t \\ z &= t \end{aligned}$$

Criterios de corrección:

- Resolver el sistema correctamente, 0,75 puntos.

2. *a*) **[1,5 puntos]** Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \longrightarrow +\infty$.

b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int x \cdot \cos(2x) dx.$$

Solución:

a) El enunciado establece dos condiciones para obtener a y b:

(1) $\text{lím}_{x\longrightarrow 1} f(x) = \pm\infty$.

(2) $\text{lím}_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = 2$.

La condición (1) implica que el denominador se anule cuando la función tiende a 1, es decir, $2 \cdot 1 + b = 0$. Por lo que $b = -2$.

La condición (2) implica que $a/2 = 2$, por lo que $a = 4$.

Criterios de corrección:

- Plantear las dos condiciones de manera razonada, 1 punto; obtener el valor de a, 0,25 puntos; obtener el valor de b, 0,25 puntos.

b) Resolvemos esta integral integrando por partes tomando:

$$\begin{array}{rcl} u & = & x \\ dv & = & \cos(2x) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} du & = & dx \\ v & = & \text{sen}(2x)/2 \end{array}$$

Entonces, la integral quedaría:

$$\int x \cdot \cos(2x)dx = x \cdot \text{sen}(2x)/2 - \int (\text{sen}(2x)/2)dx = x \cdot \text{sen}(2x)/2 + \cos(2x)/4 + C$$

.

Criterios de corrección:

- Plantear resolución por partes, 0,25 puntos; hallar v, 0,25 puntos; resolver la integral correctamente, 0,5 puntos.

3. *a*) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = \left(2e^{x^2-4} - 8x + 14\right) / \left(x^2 - 2x\right).$$

b) **[1 punto]** Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}.$$

Solución:

a) La función $f(x)$ es cociente de funciones continuas, por lo que será continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en aquellos puntos en los que se anule el denominador. El denominador se anula cuando $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$, es decir, cuando $x = 0$ o $x = 2$. Para ver de qué tipo es la discontinuidad estudiaremos los límites de cada caso por separado:

- $x = 0$:
  $\text{lím}_{x\longrightarrow 0} f(x) = (2e^{-4} + 14)/0 = \pm\infty$.
  Por tanto, en este caso tenemos una discontinuidad de salto infinito.
- $x = 2$:
  $\text{lím}_{x\longrightarrow 2} f(x) = 0/0$. Por tanto, tenemos una indeterminación y resolveremos el límite utilizando la regla de L'Hôpital:
  $\text{lím}_{x\longrightarrow 2} f(x) = \text{lím}_{x\longrightarrow 2} \left(4xe^{x^2-4} - 8\right) / (2x-2) = (4 \cdot 2 \cdot 1 - 8)/(2 \cdot 2 - 2) = 0/2 = 0$.
  Por tanto, la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

Criterios de corrección:

- Encontrar los valores en los que se anula el denominador, 0,25 puntos; hallar límites cuando $x \longrightarrow 0$, 0,5 puntos; hallar límites cuando $x \longrightarrow 2$, 0,75 puntos.

b) Escribimos las propiedades que usamos paso a paso:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \left(F2 : F2 + 2 \cdot F1\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\text{Sacamos el 2 que multiplica a F3}\right) = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\text{Intercambiamos F1 y F3}\right) =$$

$$-2\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = -4.$$

Criterios de corrección:

- Indicar cada uno de los 4 pasos a seguir, 0,25 puntos (cada paso).

4. Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

Solución:

a) El vector normal a π es $\vec{u} = (1, 1, 1)$, por lo que las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= 0 + \lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{aligned}$$

El punto de intersección entre la recta y el plano es aquel que cumple las ecuaciones de la recta y el plano. Sustituimos en la ecuación del plano las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$(1 + \lambda) + (\lambda) + (1 + \lambda) = 8 \Longrightarrow 2 + 3\lambda = 8 \Longrightarrow \lambda = 2$$

Por tanto, el punto de intersección es $B = (1 + 2, 0 + 2, 1 + 2) = (3, 2, 3)$.

Criterios de corrección:

- Obtener el vector normal, 0,25 puntos; obtener la ecuación de la recta perpendicular, 0,5 puntos; obtener el punto de corte, 0,75 puntos.

b) El punto simétrico de A con respecto a π se puede obtener, por ejemplo, sumando al punto A dos veces el vector $\vec{AB} = (3 - 1, 2 - 0, 3 - 1) = (2, 2, 2)$. Por tanto, el punto que se pide es $C = (1, 0, 1) + 2(2, 2, 2) = (5, 4, 5)$.

Criterios de corrección:

- Plantear la resolución, 0,5 puntos; hallar el punto, 0,5 puntos.

5. *a*) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.

b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

Solución:

a) Para definir el plano que se pide tomaremos el vector normal a π, $\vec{u} = (1, -3, 1)$, el vector $\vec{AB} = (1, 1, 2)$ y el punto A. De esta manera, el plano queda definido por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= 0 + \lambda + \gamma \\ y &= 0 - 3\lambda + \gamma \\ z &= -1 + \lambda + 2\gamma \end{aligned}$$

Criterios de corrección:

- Obtener el vector normal a π, 0,25 puntos; obtener el otro vector necesario, 0,25 puntos; obtener la ecuación del plano, 0,5 puntos.

b) En primer lugar, calculamos los puntos de intersección de $f(x)$ y $g(x)$, que son $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Por tanto, el área que se pide es

$$\int_1^2 \left((3 - x) - (x^2 - 4x + 5)\right) dx = \int_1^2 \left(-x^2 + 3x - 2\right) dx = 1/6.$$

Criterios de corrección:

- Obtener los puntos de intersección, 0,25 puntos; plantear la integral, 0,5 puntos; hallar la primitiva, 0,25 puntos; obtener el área, 0,5 puntos.

6. *a*) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

   b) **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = (2e^x - 8x - 3) \,/\, \left(x^2 + 2\right)$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

Solución:

a) El volumen del tetraedro viene dado por un sexto del producto mixto de los vectores $\vec{AB} = (1 - a, 3, -1)$, $\vec{AC} = (-a, 1, -1)$ y $\vec{AD} = (1 - a, 1, 0)$, es decir,

$$V = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 - a & 3 & -1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1 - a & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = |(2a - 1)/6|$$

Entonces, tenemos que $|(2a - 1)/6| = 1 \Longrightarrow |2a - 1| = 6 \Longrightarrow 2a - 1 = \pm 6$. Por tanto, los valores de a qeu buscamos son $a = 7/2$ y $a = -5/2$.

Criterios de corrección:

- Plantear el producto mixto, 0,75 puntos; hallar el valor de a, 0,75 puntos.

b) El teorema de Bolzano dice lo siguiente:

> Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ toman valores de signo contratio, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser cociente de funciones continuas con un denominador que nunca se anula. Para poder aplicar el teorema de Bolzano bastaría con encontrar un intervalo cerrado en el que la función tome valores de signo contrario en los extremos del intervalor. Por ejemplo, podríamos tomar el intervalo $[0, 10]$ (aunque existen otros que nos servirían igualmente) ya que $f(0) = -1/2 < 0$ y $f(10) = (2e^{10} - 83)/(10^2 + 2) > 0$. Por tanto, aplicando el teorema del Bolzano podemos afirmar que existe un $c \in [0, 10]$ tal que $f(c) = 0$ y que, por tanto, la función $f(x)$ corta al eje de abscisas al menos una vez.

Criterios de corrección:

- Enunciar el teorema de Bolzano, 0,25 puntos; argumentar la continuidad de $f(x)$, 0,25 puntos; argumentar que haya al menos una raíz, 0,5 puntos.

7. *a*) **[1,5 puntos]** Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

b) **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

Solución:

a) Despejando X obtenemos:

$$X = (I - A)^{-1}B,$$

que se puede calcular siempre y cuando la matriz $I - A$ sea invertible (con I la matriz identidad).

$$I - A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Criterios de corrección:

- Despejar X en la ecuación, 0,75 puntos; obtener la inversa de $I-A$, 0,5 puntos; realizar el producto $(I-A)^{-1}B$, 0,25 puntos.

b) Sea X la variable aleatoria que representa el número de carreras que gana el piloto de esas 4 carreras. Esta variable sigue una distribución binomial con probabilidad 0,6 y $n = 4$. La probabilidad que se pide es

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0{,}0256 + 0{,}1536) = 0{,}8208.$$

Criterios de corrección:

- Identificar la variable aleatoria binomial y sus parámetros, 0,5 puntos; hallar la probabilidad, 0,5 puntos.

8. *a*) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?

a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Solución:

a) Sea C el evento que representa que un alumno va a clase y A el que representa que un alumno aprueba. El enunciado nos dice que $P(C) = 0{,}90$, $P(A \mid C) = 0{,}80$ y $P(A \mid C^c) = 0{,}50$, donde C^c es el suceso complementario de C (es decir, el alumno no va a clase).

a.1) La probabilidad que se pide es:

$$P(A) = P(A \mid C)P(C) + P(A \mid C^c)P(C^c) = 0{,}80 \cdot 0{,}90 + 0{,}50(1 - 0{,}90) = 0{,}77$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

a.2) La probabilidad que se pide es:

$$P(C^c \mid A^c) = \frac{P(C^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c \mid C^c)P(C^c)}{P(A^c)} = \frac{(1 - 0{,}50)(1 - 0{,}90)}{1 - 0{,}77} = 0{,}2174$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

b) Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad de agua embotellada. Su distribución es normal de media 150 ml y desviación típica 5 ml.

b.1) La probabilidad que se pide es

$$P(X > 152) = P(Z > \frac{152 - 150}{5}) = P(Z > 0{,}40) = 1 - P(Z \leq 0{,}40) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

b.2) La probabilidad que se pide es

$$P(149 \leq X \leq 152) = P(X \leq 152) - P(X \leq 149) = P(Z \leq 0{,}40) - P(Z \leq -0{,}20) =$$

$$P(Z \leq 0{,}40) - (1 - P(Z \leq 0{,}20)) = 0{,}6554 - (1 - 0{,}5793) = 0{,}2347.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.