Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que $A \cdot X = B$.

   b) **[1 punto]** Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

   Solución:

   a) Se ha de cumplir que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Las ecuaciones resultantes son: $2a + c = 1$; $2b = 0$; $4a + 2c = 2$; $4b = 0$. Por tanto, b=0 y $2a + c = 1$ son las condiciones que se han de cumplir.

   Criterios de corrección:

   - Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener las condiciones, 1 punto.

   b) Para que la matriz X sea simétrica se tiene que cumplir que $b = c$. Como ya hemos visto que $b = 0$, entonces $c = 0$ y $a = 1/2$. La matrix resultante es $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Criterios de corrección:

   - Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener las nuevas condiciones y X, 0,5 puntos.

2. *a*) **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.

   b) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

   c) **[1 punto]** ¿Podría $f(x)$ tener más de una raíz en el intervalo $[0, 2]$? Justifica tu respuesta.

   Solución:

   a) El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente manera:

   > Sea una $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

   Criterios de corrección:

   - Enunciar el teorema correctamente, 0,5 puntos.

   b) La función $f(x)$ es un polinomio y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$. Además, como $f(0) = -10$ y $f(2) = 28$, por el teorema de Bolzano existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Por tanto, $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

   Criterios de corrección:

   - Plantear el problema, 0,5 puntos; justificar el resultado, 0,5 puntos.

   c) Veamos si la función crece y/o decrece en el intervalo. Su primera derivada es $f'(x) = 3x^2 + 12x + 3$, que es estrictamente positiva en el intervalo $[0, 2]$. Por tanto, la función $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo y sólo puede tener una raíz en ese intervalo.

   Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; justificar el resultado, 0,5 puntos.

3. Sean el punto $A(1, 1, a)$ y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

   b) **[1 punto]** Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

   Solución:

   a) Si el punto A está contenido en el plano π se debe cumplir que $b + 1 + a = 1$, es decir, $a = -b$. De la segunda condición se ha de cumplir que el vector normal $(b, 1, 1)$ es perpendicular a $\vec{u}$, que se cumple sólo si su producto escalar es cero, es decir, cuando $b + 2 + 0 = 0$. Por tanto, $b = -2$ y $a = 2$.

   Criterios de corrección:

   - Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener las dos condiciones correctamente, 0,5 puntos; obtener los valores correctos de a y b, 0,5 puntos.

   b) El punto es $A(1, 1, 2)$ y el vector normal de π es $(-2, 1, 1)$, que será el vector director de la recta que se pide. Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π es

   $$(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(-2, 1, 1), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

   Criterios de corrección:

   - Plantear el problema, calcular el punto A y el vector normal, 0,5 puntos; dar la ecuación de la recta correcta, 0,5 puntos. Si los valores de a y b obtenidos en el primer apartado no son correctos, resolver este apartado como si lo fueran.

4. *a*) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

   b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.

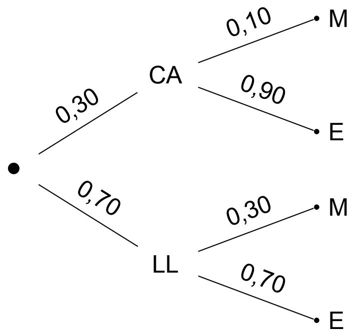
   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

Solución:

a) La probabilidad de que se haga una reparación en el polígono Campo es $P(CA) = 0{,}30$ y de que se haga en el polígono Llano es $P(LL) = 0{,}70$. La probabilidad de que se haga una reparación de tipo mecánico en el polígono Campo es $P(M \mid CA) = 0{,}10$ y de que se haga de tipo eléctrico es $P(E \mid CA) = 0{,}90$. De manera similar, $P(M \mid LL) = 0{,}30$ y $P(E \mid LL) = 0{,}70$.



1) Se pide $P(M) = 0{,}30 \cdot 0{,}10 + 0{,}70 \cdot 0{,}30 = 0{,}24$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

2) Resolveremos este apartado usando el teorema de Bayes:

$$P(LL \mid E) = \frac{P(LL \cap E)}{P(E)} = \frac{P(LL)P(E \mid LL)}{1 - P(M)} = \frac{0{,}70 \cdot 0{,}70}{1 - 0{,}24} = \frac{0{,}49}{0{,}76} = 0{,}6447$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

b) 1) Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo que tarda el piloto en dar una vuelta al circuito. La distribución de X es normal con media 1.5 minutos y desviación típica de 0.15 minutos. La probabilidad que se pide es:

$$P(X < 1{,}35) = P(Z < \frac{1{,}35 - 1{,}5}{0{,}15}) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

2) Sea q el tiempo que se pide en el enunciado. Este valor cumple $P(X < q) = 0{,}8508$. Para obtenerlo operamos de la siguiente manera:

$$P(X < q) = 0{,}8508 = P(Z < \frac{q - 1{,}5}{0{,}15})$$

Mirando en la tabla adjunta vemos que $\frac{q-1{,}5}{0{,}15} = 1{,}04$. Por tanto, $q = 1{,}5 + 0{,}15 \cdot 1{,}04 = 1{,}6560$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

5. *a*) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}}.$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1 - 3x = t^6$.

b) **[1,5 puntos]** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

Solución:

a) Del cambio de variable propuesto obtenemos $-3dx = 6t^5 dt$, es decir, $dx = -2t^5 dt$. Haciendo el cambio:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}} = \int \frac{-2t^5 dt}{(t^6)^{1/2} - (t^6)^{2/3}} = \int \frac{-2t^5 dt}{t^3 - t^4} = -2 \int \frac{t^2 dt}{1-t} =$$

$$-2\left(\int (-1-t)dt + \int \frac{dt}{1-t}\right) = -2\left(-t - t^2/2 - \log(1-t)\right) + C =$$

(deshacemos el cambio de variable teniendo en cuenta que $t = (1-3x)^{1/6}$)

$$-2\left(-(1-3x)^{1/6} - \frac{(1-3x)^{1/3}}{2} - \log(1-(1-3x)^{1/6})\right) + C.$$

Criterios de corrección:

- Plantear la resolución, 0,5 puntos; realizar el cambio de variable y resolver la integral, 0,25 puntos; dar la solución correcta, 0,25 puntos.

b) La matriz A tendrá inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero. Como $|A| = -2$, la matriz A^{-1} existe. Para estudiar si $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa usaremos un razonamiento similar teniendo en cuenta que $|A^{-1} \cdot B| = |A^{-1}| \cdot |B|$.
Como $|A^{-1}| = 1/|A| = -1/2$ y $|B| = 0$, entonces $|A^{-1} \cdot B| = (-1/2) \cdot 0 = 0$. Por tanto, la matriz $A^{-1} \cdot B$ no tiene inversa.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; justificar la existencia de A^{-1}, 0,5 puntos; justificar la no existencia de la inversa de $A^{-1} \cdot B$, 0,5 puntos.

6. *a*) **[1 punto]** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}.$$

b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,1,3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2,2,0)$ y $\vec{v} = (0,0,-1)$.

Solución:

a) El límite es indeterminado del tipo 1^∞. Lo resolvemos reorganizando términos (por ejemplo):

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{\frac{5x}{5x}x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\frac{x^2}{5x}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Criterios de corrección:

- Determinar el tipo de indeterminación, 0,25 puntos; plantear el método de resolución y realizar los cálculos correctamente, 0,5 puntos; dar la solución correcta 0,25 puntos.

b) El vector director será el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 2j + 0k = (-2,2,0).$$

Por tanto, a ecuación de la recta es:

$$(x,y,z) = (2,1,3) + \lambda(-2,2,0), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5; calcular el vector director, 0,5; dar la ecuación de la recta, 0,5 puntos.

7. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

   b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

   b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Solución:

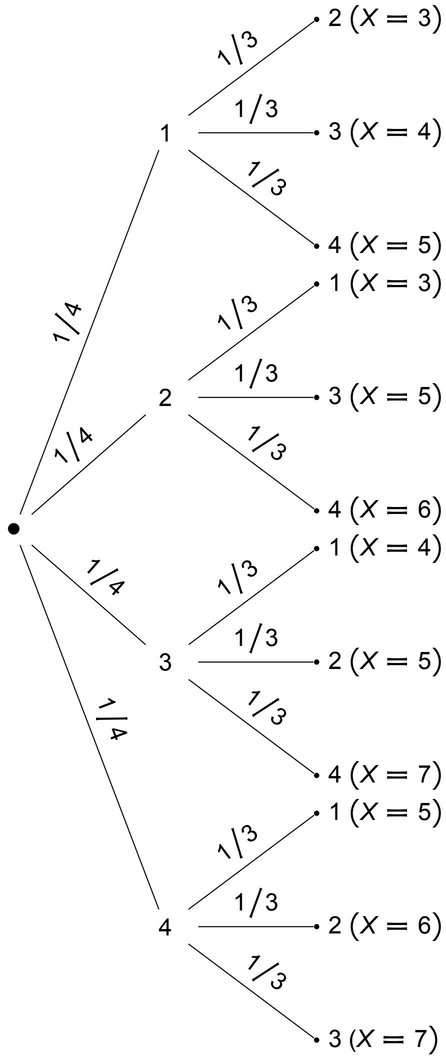
a) La función $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ al tratarse de un polinomio. Los máximos y mínimos relativos los obtendremos igualando la derivada a cero. Como $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$, entonces los posibles extremos relativos están en $x_1 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ y $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Para ver si se trata de máximos o mínimos relativos estudiaremos el signo de la segunda derivada. Como $f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$, vemos que $f''(x_1) < 0$ (x_1 es un máximo relativo) y $f''(x_2) > 0$ (es un mínimo relativo).

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener los puntos a estudiar y decir si son máximos o mínimos relativos correctamente, 0,5 puntos.

b) Sea X la variable aleatoria que representa la suma de los dos valores de las bolas extraídas de la bolsa. El siguiente diagrama de árbol representa todas las posibles extraccciones de dos bolas sin reemplazamiento, el valor de X y su probabilidad:



Aunque no se pida en el examen, el espacio muestral de X es $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ y las probabilidades son $P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 6) = P(X = 7) = \frac{2}{12}$ y $P(X = 5) = \frac{4}{12}$.

1) En este caso, $P(X = 3) = \frac{2}{12}$, que se obtiene fácilmente consultando el diagrama de árbol.

   Criterios de corrección:

   - Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

2) Como el valor mínimo de X es 3, los sucesos $(X = 3)$ y $(X > 3)$ son complementarios. Así, $P(X > 3) = 1 - P(X = 3) = \frac{10}{12}$.

   Criterios de corrección:

   - Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

8. *a*) **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) **[1,25 puntos]** Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

Solución:

a) El rango de la matriz es al menos 2 porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Veamos qué pasa con el rango de las submatrices 3×3 (calculando sus determinantes):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, el rango de A es 2.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; calcular los determinantes 3×3, 0, 5; dar la solución correcta, 0,25 puntos.

b) Para estudiar la posición relativa de la recta r (definida por los planos π_1 y π_2) y el plano π_3 hay que estudiar las soluciones del sistema de ecuaciones cuya matriz asociada es la matriz A del apartado anterior. Ya hemos visto que el rango de A es 2, así que el sistema es compatible indeterminado. Por tanto, la recta r está contenida en el plano π_3.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; justificar la solución, 0,5 puntos; dar la solución correcta, 0,25 puntos. Si hay un error en el apartado anterior y se usa en este, corregir teniendo en cuenta cómo se justifica el resultado.