Escuela Técnica Superior de Ingenieros de
Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Castilla-La Mancha, Campus de Ciudad Real

Curso Cero-Matemáticas

2. Desigualdades, Inecuaciones y Valor Absoluto

2.1 Introducción

En este capítulo vamos a tratar con expresiones matemáticas que involucran los signos de desigualdad: $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$, los cuales significan, respectivamente, *menor que*, *menor o igual que*, *mayor que* y *menor o igual que*. Es importante observar que dichos signos comparan expresiones a ambos lados. Es decir, si tenemos dos expresiones matemáticas A y B, y queremos saber cuál es menor o mayor, al escribir por ejemplo $A < B$, lo que se establecería es que A es menor que B. Notemos que si hubiésemos escrito $A \leq B$, entonces lo que estaríamos representando es que A es menor o igual que B. Hay que tener cuidado con este último tipo de desigualdades puesto que lo que están señalando es que A puede ser estrictamente menor que B o, también, que A puede ser igual a B. Si A y B son números reales, entonces o bien A será menor que B, o bien A será igual a B o bien A será mayor que B. Tales casos son sencillos de manejar. Sin embargo, nos podemos encontrar con situaciones más complejas que abordaremos a continuación.

- **Resolución de inecuaciones:** Una inecuación es una expresión algebraica en la que sus dos miembros (izquierdo y derecho) A y B aparecen relacionados por alguno de los signos de desigualdad: $<$, $\leq$, $>$ ó $\geq$ y, además, involucran incógnitas. Por ejemplo A ó B pueden depender de x. En tal caso habrá que proceder con un análisis que determine para qué valores de x se cumple que entre A y B existe el tipo de desigualdad establecido por la inecuación. Cuando se nos plantee la resolución de una inecuación operaremos del mismo modo que con las ecuaciones, aunque deberemos tener en cuenta que si la inecuación se multiplica por un número negativo el signo correspondiente de la inecuación ($<$, $\leq$, $>$ ó $\geq$) se invierte.

  Ejemplo: Para resolver la inecuación de primer grado $2(x+1)-3(x-2) < x+6$ podemos realizar las siguientes operaciones equivalentes (cada paso se denota por el símbolo $\Leftrightarrow$)
  $$2x+2-3x+6 < x+6 \;\Rightarrow\; 2x-3x-x < -2-6+6 \;\Rightarrow\; -2x < -2 \;\Rightarrow\; x > 1,$$
  lo cual quiere decir que los números $x > 1$ son los que satisfacen la condición (inecuación) original $2(x+1)-3(x-2) < x+6$. Observemos que, tal y como aparecía representada la

inecuación original, $A = 2(x+1)-3(x-2)$ y $B = x+6$. Puesto que esa inecuación establecía que $A < B$, lo que hemos hecho es determinar para qué valores de x se cumple que $A < B$.

En el caso de inecuaciones de grado superior a uno, en general, es más complejo determinar los valores de x que satisfacen dichas inecuaciones.

Ejemplo: Consideremos la inecuación cuadrática $x^2-6x+8>0$. En este ejemplo observamos que el polinomio de segundo grado x^2-6x+8 se puede expresar como producto de dos factores. Esto es, $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$. Por tanto, buscamos los valores de x que satisfacen la desigualdad $(x-4)(x-2)>0$. Pueden presentarse dos situaciones, o bien $(x-4)>0$ y $(x-2)>0$, o bien $(x-4)<0$ y $(x-2)<0$. En el primer caso, debe cumplirse simultáneamente que $x>4$ y $x>2$. Luego $x>4$, pues dicha desigualdad satisface también que $x>2$, mientras que puede haber valores de x para los que se tenga $x>2$, por ejemplo $x=3$ y, sin embargo, no sea cierto que $x>4$. En el segundo caso, debe cumplirse simultáneamente que $x<4$ y $x<2$. Por consiguiente, ambas desigualdades tendrán lugar si $x<2$. Concluimos pues que el conjunto de valores para x que satisfacen la inecuación cuadrática $x^2-6x+8>0$ está formado por todos aquellos x contenidos en los intervalos $(-\infty,2)\cup(4,\infty)$.

- **Cuadrados de números reales:** Dado un número real a, pueden presentarse tres situaciones: $a>0$, $a=0$ ó $a<0$. Si $a>0$, entonces $a^2=a\cdot a>0$. De igual manera, si $a<0$, entonces $a^2=(-a)\cdot(-a)>0$. Finalmente, si $a=0$, se tiene que $a^2=a\cdot a=0\cdot 0=0$. Por tanto, observamos que para todo $a\in\mathbb{R}$ siempre se cumplirá que $a^2\geq 0$. La igualdad solo podrá producirse si, y solo si, $a=0$. Por otro lado, si $a\neq 0$, entonces $a^2>0$.

  Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones
  $$x^2+y^2-2x-4y+5=0, \quad xy=2.$$
  Para hallar los valores reales de x e y, comenzaremos completando cuadrados en la primera ecuación. Observemos que
  $$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \;\Rightarrow\; \left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-4y+4\right)=0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2+(y-2)^2=0.$$
  La última ecuación señala que la suma de $(x-1)^2$ e $(y-2)^2$ es igual a cero. Como cada término es no negativo, es decir, $(x-1)^2\geq 0$ e $(y-2)^2\geq 0$, su suma también es no negativa. Entonces debe cumplirse $(x-1)^2=0$ e $(y-2)^2=0$. Por tanto, $x=1$ e $y=2$. Comprobamos que la segunda ecuación $xy=2$ se satisface con esos valores. Podemos concluir que los únicas soluciones para las incógnitas del sistema son $x=1$ e $y=2$.

- **Desigualdad aritmético-geométrica:** Una consecuencia interesante del hecho de que $a^2\geq 0$ cuando $a\in\mathbb{R}$ es la siguiente. Supongamos que tenemos dos números reales no negativos a y b (es decir, que o bien son positivos o bien alguno de ellos es nulo). Entonces, la cantidad $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$. La igualdad estricta se cumplirá si, y sólo si, $a=b$ como es fácil verificar. Esta observación conduce a un resultado muy útil. Desarrollando el cuadrado obtenemos
  $$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0\,, \quad\Longleftrightarrow\quad a-2\sqrt{ab}+b\geq 0\,, \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\,. \tag{2.1}$$
  La última expresión en (2.1) representa la llamada **desigualdad aritmético-geométrica** entre dos números reales no negativos a y b. El cociente $\frac{a+b}{2}$ es la *media aritmética de dos números reales* y $\sqrt{ab}$ es la *media geométrica de dos números reales no negativos*. Dicha desigualdad admite, además, una interpretación gráfica muy sencilla. Construyamos una semicircunferencia cuyo diámetro es la suma $a+b$ (ver la figura 2.1). Obviamente, el radio de la semicircunferencia

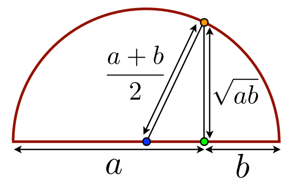


Figura 2.1: Interpretación geométrica de la desigualdad aritmético-geométrica $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ entre dos números reales no negativos a y b.

es $(a+b)/2$. Utilizando el Teorema de Pitágoras es fácil ver que la longitud de la cuerda perpendicular al diámetro en el punto común de los dos segmentos de longitud a y b es $\sqrt{ab}$, ya que $\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$. Es claro entonces que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ y que la igualdad se alcanzará si, y solo si, $a = b$ (que en la figura 2.1 correspondería a que a y b fuesen ambos iguales al radio de la semircunferencia).

Ejemplo: La desigualdad aritmético-geométrica (2.1) es útil en algunos problemas de índole práctica. Supongamos que disponemos de una valla de longitud total L y con ella queremos construir el cierre de un recinto rectangular de lados a y b. ¿Para qué valores de a y b se puede conseguir que el área del recinto rectangular sea máxima?
Por una parte, tenemos que el área S de un rectángulo de lados a y b es igual a $S = ab$. Por otra parte, el perímetro P de un rectángulo de lados a y b es igual a $P = 2a+2b$. Como nos señalan en el enunciado que la valla con la que se quiere cerrar el rectángulo tiene longitud total L, entonces $P = L$, es decir, $a+b = \frac{L}{2}$. Hasta aquí todo está claro. ¿Cómo hacemos uso de la desigualdad aritmético-geométrica (2.1) para resolver el problema? Lo que nos piden es maximizar el área $S = ab$. Para ello, como a y b son números no negativos, podemos escribir

$$S = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 .$$

Observemos ahora que en el miembro derecho de la desigualdad aparece la suma $a+b$. Dicha suma hemos visto que es igual al semiperímetro del rectángulo, o sea, $a+b = \frac{L}{2}$. Por tanto, el área S del rectángulo satisfará la desigualdad $S \leq \left(\frac{L}{4}\right)^2$. Esto es, el área S del rectángulo podrá ser, a lo sumo, igual a $\frac{L^2}{16}$. ¿Cuándo se podrá alcanzar el valor máximo $\frac{L^2}{16}$? La respuesta a esta pregunta también nos la proporciona la desigualdad aritmético-geométrica (2.1). Nos dice que la igualdad se alcanzará si, y sólo si, $a = b$. Esto sucederá si el rectángulo se convierte en un cuadrado de lado igual a $\frac{L}{4}$. Concluimos entonces que si disponemos de una valla de longitud total L y con ella queremos construir el cierre de un recinto rectangular de área máxima, lo lograremos mediante un cuadrado cuyos lados sean iguales a la cuarta parte de la longitud total de la valla.

La desigualdad aritmético-geométrica (2.1) se puede generalizar. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son números reales no negativos, entonces se cumple

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\,. \tag{2.2}$$

La igualdad estricta se satisface si, y solo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. La desigualdad aritmético-geométrica (2.1) es un caso particular de (2.2) cuando únicamente hay $n = 2$ números reales no negativos. Recuérdese que $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ es la media aritmética de n números reales.

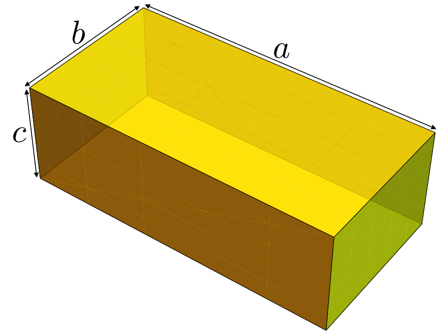


Figura 2.2: Paralelepípedo de caras perpendiculares entre sí y aristas de longitud a, b y c.

Ejemplo: De entre todos los paralelepípedos, cuyas seis caras son perpendiculares entre sí (ver figura 2.2) y tales que la suma de todas sus aristas es igual a L, hallar aquel de volumen máximo.
Este problema se parece al ejemplo anterior, aunque ahora la situación que se nos plantea no es en el plano sino en el espacio. Por una parte, tenemos que el volumen V de un paralelepípedo de caras perpendiculares y aristas a, b y c es igual a $V = abc$. Por otra parte, nos indican que la suma de todas las aristas es igual a L. Como un paralelepípedo tiene doce aristas, cuatro de cada longitud a, b y c, entonces $4a+4b+4c = L$. Debemos hallar el paralelepípedo de volumen V máximo. ¿Cómo hacemos uso en este caso de la desigualdad aritmético-geométrica (2.2) para resolver el problema? Observemos en primer lugar que la versión de la desigualdad aritmético-geométrica (2.2) que necesitamos involucra a tres números no negativos, esto es, $n = 3$. Puesto que a, b y c son números no negativos, podemos escribir

$$V = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Nótese que hemos elevado al cubo ambos miembros de la desigualdad aritmético-geométrica (2.2). En el miembro derecho de la desigualdad aparece la suma $a+b+c$. Dicha suma hemos visto que es igual a $\frac{L}{4}$. Por tanto, el volumen V del paralelepípedo satisfará la desigualdad $V \leq \left(\frac{L}{12}\right)^3$. Esto es, el volumen V del paralelepípedo podrá ser, a lo sumo, igual a $\frac{L^3}{12^3}$. ¿Cuándo se podrá alcanzar ese valor máximo? La respuesta a esta pregunta nos la proporciona la desigualdad aritmético-geométrica generalizada (2.2). La igualdad se alcanzará si, y solo si, $a = b = c$. Esto sucederá si el paralelepípedo se convierte en un cubo de arista igual a $\frac{L}{12}$. Concluimos entonces que, de entre todos los paralelepípedos cuyas seis caras son perpendiculares entre sí y tales que la suma de todas sus aristas es igual a L, aquel que tiene el volumen máximo será un cubo de arista igual a $\frac{L}{12}$.

En los problemas propuestos veremos más ejemplos de la desigualdad aritmético-geométrica.

- **Valor absoluto:** El valor absoluto de un número real x, el cual se denota por $|x|$, es el mismo valor x cuando este es positivo o cero, y el opuesto de x, si es negativo, o sea,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La representación gráfica del valor absoluto $|x|$ se muestra en la figura 2.3.

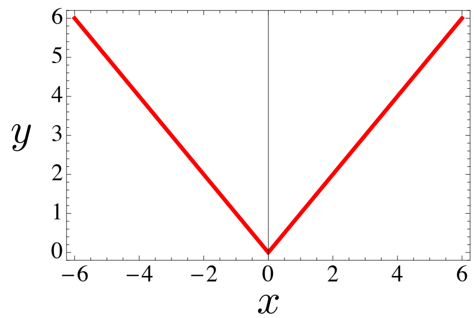


Figura 2.3: Gráfica del valor absoluto $|x|$.

Propiedades del valor absoluto: Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple

- El valor absoluto siempre es no negativo: $|x| \geq 0$.
- La distancia entre dos números reales a y b viene dada por $|a-b|$.
- Desigualdad triangular: $|x+y| \leq |x|+|y|$.
- Sea $a>0$, entonces $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$.
- Sea $a>0$, entonces $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ o bien $x<-a$.
- $|x|>|y| \Leftrightarrow x^2>y^2$.
- $|x|=|-x|=\sqrt{x^2}$.
- $|xy|=|x||y|$.
- Si $y \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $|x^n|=|x|^n$.

Finalizamos indicando que la distancia entre dos números reales a y b se representa por $|a-b|$ (o también por $|b-a|$) y aparece representada en la figura 2.4. Este hecho tiene diversas aplicaciones. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Dados dos números reales a y b encontrar sendas expresiones sencillas, en términos del valor absoluto $|a-b|$, que permitan determinar cuál de los dos reales a y b es mayor y cuál es menor, respectivamente.
Vamos a denotar a tales expresiones por $\text{Máx}(a,b)$ y $\text{Mín}(a,b)$, de manera que $\text{Máx}(a,b)$ devuelve el *mayor* valor del par de números a y b, mientras que $\text{Mín}(a,b)$ devuelve el *menor* valor del par de números a y b. Empecemos por encontrar $\text{Máx}(a,b)$. Es claro que $\text{Máx}(a,b)$ podría escribirse así

$$\text{Máx}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{si } a>b, \\ \frac{a+b}{2}, & \text{si } a=b, \\ b, & \text{si } a<b. \end{cases} \tag{2.3}$$

Aunque esta forma no involucra valores absolutos, proporciona algunas pistas. Por un lado,

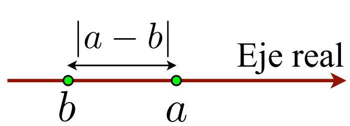


Figura 2.4: Interpretación geométrica de $|a-b|$ como la distancia entre dos números a y b del eje real.

si $a > b$, entonces $|a-b|$ es el valor en el que a excede a b. Por otro lado, si $a < b$, entonces $|a-b|$ es el valor en el que b excede a a. Obviamente, si $a = b$, entonces $|a-b| = 0$. Vemos pues que la presencia de $|a-b|$ es lo que nos permite reducir (2.3) a

$$\text{Máx}(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \tag{2.4}$$

que cumple las tres posibilidades mostradas en (2.3) y, a la vez, usa el valor absoluto.
Podemos seguir un procedimiento completamente análogo al precedente para encontrar la expresión de $\text{Mín}(a,b)$, la cual vendría dada por

$$\text{Mín}(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}, \tag{2.5}$$

y que satisface $\text{Mín}(a,b) = b$ si $a > b$, $\text{Mín}(a,b) = (a+b)/2$ si $a = b$, y $\text{Mín}(a,b) = a$ si $a < b$, como es fácil comprobar.

2.2 Problemas Resueltos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \ |x+3| = 1. \qquad b)\ \ |x-1|\,|x+1| = 0.$$

Soluciones: *a)* Para resolver la ecuación $|x+3| = 1$ aplicamos primeramente la definición de valor absoluto a $|x+3|$. Tenemos

$$|x+3| \;=\; \begin{cases} x+3 & \text{si } x+3 \geq 0, \\ -(x+3) & \text{si } x+3 < 0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$|x+3|-1 \;=\; \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -3, \\ -x-4 & \text{si } x < -3. \end{cases}$$

En el primer caso, la ecuación a resolver se reduce a $x+2 = 0$. Luego $x = -2$ lo cual se cumple ya que $x \geq -3$. En el segundo caso, la ecuación a resolver es $-x-4 = 0$. Por tanto $x = -4$, lo cual se cumple pues $x < -3$. Concluimos que las soluciones son $x = -2$ y $x = -4$.

b) Para que el producto de $|x-1|\,|x+1|$ sea cero al menos un factor tiene que anularse. Luego,

$$|x-1|\,|x+1| = 0 \;\Leftrightarrow\; x-1 = 0, \text{ o bien } x+1 = 0.$$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $x = 1$ y $x = -1$, es decir, el conjunto $\{-1,1\}$.

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a)\ \ x^2+2x-1 \leq 0. \qquad b)\ \ |x-3| < |x+1|. \qquad c)\ \ (x+2)^2 > 5.$$

Soluciones: *a)* Factorizando el polinomio obtenemos que $x^2+2x-1 = (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$. Para que se verifique la desigualdad $x^2+2x-1 \leq 0$ tiene que ocurrir que $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) \leq 0$. Eso implica dos posibles casos: El primero es que $x+1-\sqrt{2} \leq 0$ y $x+1+\sqrt{2} \geq 0$. El segundo es que $x+1-\sqrt{2} \geq 0$ y $x+1+\sqrt{2} \leq 0$. El primer caso conduce a que la variable x debe satisfacer $-\sqrt{2}-1 \leq x \leq \sqrt{2}-1$. El segundo caso conduce a que la variable x debería satisfacer $-\sqrt{2}-1 \geq x \geq \sqrt{2}-1$, lo cual es imposible. Concluimos entonces que la inecuación $x^2+2x-1 \leq 0$ se cumple si la variable x satisface $-\sqrt{2}-1 \leq x \leq \sqrt{2}-1$.

b) Observamos que $|x-3| < |x+1|$ es equivalente a tener $|x-3|-|x+1| < 0$. Por definición,

$$|x-3| \;=\; \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3, \\ -x+3 & \text{si } x < 3, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad |x+1| \;=\; \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1, \\ -x-1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Si combinamos los distintos casos obtenemos

$$|x-3|-|x+1| \;=\; \begin{cases} x-3-x-1 & \text{si } x \geq 3 \,\wedge\, x \geq -1, \\ -x+3-x-1 & \text{si } x < 3 \text{ y } x \geq -1, \\ x-3+x+1 & \text{si } x \geq 3 \text{ y } x < -1, \\ -x+3+x+1 & \text{si } x < 3 \text{ y } x < -1, \end{cases}$$

lo cual es equivalente a

$$|x-3|-|x+1| \;=\; \begin{cases} -4 & \text{si } x \geq 3, \\ -2x+2 & \text{si } -1 \leq x < 3, \\ 2x-2 & \text{imposible que } x \geq 3 \text{ y } x < -1, \\ 4 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Observamos que para cualquier $x \geq 3$, tenemos que $|x-3|-|x+1| = -4 < 0$. Si $-1 \leq x < 3$, entonces $|x-3|-|x+1| = -2x+2$ solo será negativo cuando $x > 1$. En todos los demás casos, esto es, cuando $x \leq 1$, $|x-3|-|x+1| \geq 0$. Concluimos pues que la desigualdad $|x-3| < |x+1|$ se cumple para cualquier $1 < x < \infty$.

c) Si aplicamos la raíz cuadrada a ambos lados de $(x+2)^2 > 5$, se tiene que $|x+2| > \sqrt{5}$. A continuación hacemos uso de la siguiente propiedad: Sean $y \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces $|y| > a$ implica que $y > a$ o bien que $y < -a$. Si identificamos $y = x+2$ y $a = \sqrt{5}$, entonces tendremos que $x+2 > \sqrt{5}$ o bien que $x+2 < -\sqrt{5}$. Concluimos entonces que los valores buscados para x que satisfacen la inecuación $(x+2)^2 > 5$ son $x > \sqrt{5}-2$ o bien que $x < -\sqrt{5}-2$.

3. La suma de dos números reales positivos x e y es 3. Calcula cuál puede ser el mayor valor que alcance el producto de x e y.

Solución: Este problema se puede resolver muy fácilmente aplicando la desigualdad aritmético-geométrica para dos números reales no negativos. Si $x, y \geq 0$ se cumple que $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. La igualdad estricta se alcanza si, y solo si, $x = y$. En nuestro caso se sabe que $x, y > 0$ y que $x+y = 3$. Se cumplen las condiciones para poder utilizar la desigualdad aritmético-geométrica. Por tanto, $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{3}{2}$. Al elevar al cuadrado a ambos lados de la desigualdad deducimos que $xy \leq \dfrac{9}{4}$. La igualdad estricta se alcanza solamente si $x = y = \dfrac{3}{2}$.

4. El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su masa. Averigua si al dividir un diamante de masa m en dos partes de masas m_1 y m_2 (no necesariamente iguales) el precio total de ambas es mayor, igual o menor que el precio del diamante sin dividir. Halla en qué caso se maximiza el precio total de ambas partes.

Solución: Sea P el precio del diamante de masa m. Se nos dice que el precio es proporcional al cuadrado de su masa, es decir, $P = cm^2$, donde $c > 0$ es una constante de proporcionalidad cuyo valor no necesitamos conocer para resolver el problema. Por otro lado, los respectivos precios de cada una de las partes del diamante, de masas m_1 y m_2, serán $P_1 = cm_1^2$ y $P_2 = cm_2^2$, siendo su suma

$$P_1 + P_2 = cm_1^2 + cm_2^2 = c\left(m_1^2 + m_2^2\right).$$

Como, además, se cumple que $m = m_1 + m_2$, tendremos para el precio del diamante de masa m

$$P = cm^2 = c\,(m_1 + m_2)^2 = c\left(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\right) = P_1 + P_2 + 2cm_1m_2\,. \tag{2.6}$$

Es evidente de (2.6) que $P > P_1 + P_2$, debido al término $2cm_1m_2 > 0$. Por tanto, al dividir el diamante en dos partes el precio total de ambas será siempre menor que el de la pieza inicial. Obsérvese de (2.6) que la depreciación es mayor si las dos partes tienen igual masa $m_1 = m_2 = m/2$, pues $2m_1m_2 \le m_1^2 + m_2^2$.

5. Sea c la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes a y b. Demuestra que $a + b \le \sqrt{2}c$.

Solución: Como $a > 0$ y $b > 0$ (las longitudes no nulas son siempre cantidades positivas), de la desigualdad aritmético-geométrica se tiene que $a^2 + b^2 \ge 2ab$. Por otro lado, puesto que a, b y c son los lados de un triángulo rectángulo, se cumple el Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$. Así pues, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \le 2\left(a^2 + b^2\right) = 2c^2$. Al extraer la raíz cuadrada en ambos lados de $(a+b)^2 \le 2c^2$ obtenemos la desigualdad pedida $a + b \le \sqrt{2}c$. Para que se satisfaga la igualdad estricta, es necesario y suficiente que $a = b$, lo cual ocurre cuando el triángulo rectángulo es isósceles.

6. Un barco se desplaza a lo largo de un tramo recto de longitud l por un río que conecta dos ciudades A y B situadas en una de sus orillas. El barco realiza un trayecto de ida y vuelta entre A y B. La velocidad de la corriente del río es v. Encuentra cuál debe ser la velocidad mínima $V_{\text{mín}}$ del barco de manera que se pueda garantizar que el barco tarda a lo sumo un tiempo τ en recorrer el itinerario de ida y vuelta entre A y B.

Solución: Es conveniente definir por t_{AB} el tiempo que tarda el barco en ir desde A hasta B. Análogamente, definimos por t_{BA} el tiempo que tarda el barco en ir desde B hasta A. Dichos tiempos no son iguales en general debido a la corriente del río. Por un lado, el enunciado indica que se desea que el tiempo total $t_{AB} + t_{BA} \ge \tau$. Por otro lado, tenemos que

$$t_{AB} = \frac{l}{V+v}\,, \quad t_{BA} = \frac{l}{V-v}\,.$$

Así pues,

$$t_{AB} + t_{BA} = \frac{l}{V+v} + \frac{l}{V-v} = \frac{(V-v)\,l + (V+v)\,l}{V^2 - v^2} = \frac{2lV}{V^2 - v^2} \ge \tau\,.$$

Buscamos la velocidad mínima $V_{\text{mín}}$ del barco de modo que se logre la igualdad. Es decir, $\frac{2lV_{\text{mín}}}{V_{\text{mín}}^2 - v^2} = \tau$. Esta expresión conduce a la ecuación cuadrática $V_{\text{mín}}^2 - \frac{2l}{\tau}V_{\text{mín}} - v^2 = 0$. De las dos posibles raíces para $V_{\text{mín}}$, nos quedamos con la que es positiva y que es $V_{\text{mín}} = \frac{l}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{l}{\tau}\right)^2 + v^2}$.

7. Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$. Demuestra la siguiente desigualdad:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca\,.$$

Solución: Observemos que

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0\,, \end{aligned}$$

donde en la última línea hemos usado el hecho de que el cuadrado de un número real es siempre no negativo. Por tanto, se concluye que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. La igualdad estricta se alcanza si, y solo si, $a=b=c$.

8. De todos los triángulos con un perímetro fijo l, encontrar aquel que encierra el área máxima y obtener una expresión que solo dependa de l.

Solución: Consideremos un triángulo arbitrario cuyos tres lados tienen longitudes a, b y c y perímetro $l=a+b+c=2s$ (se entiende que s es el semiperímetro). Para resolver el problema vamos a utilizar la fórmula de Heron, la cual proporciona una expresión para el área A del triángulo en términos de a, b, c y s, y que viene dada por

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,. \tag{2.7}$$

A continuación, invocamos la desigualdad aritmético-geométrica generalizada

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n}\,, \tag{2.8}$$

donde cada $x_j>0$, para $j=1,2,\ldots,n$, siendo $n\in\mathbb{N}$. La igualdad se cumple si, y solo si, $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=x_n$. En nuestro caso, aplicamos la desigualdad aritmético-geométrica a la fórmula de Heron (2.7). Como el perímetro l, y por consiguiente también el semiperímetro s, del triángulo se asume que es constante, nos podemos concentrar en usar la desigualdad aritmético-geométrica cuando $n=3$. La escribimos de la siguiente forma

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}=\frac{3s-(a+b+c)}{3}=\frac{s}{3}\,, \tag{2.9}$$

donde en el último paso hemos empleado que $a+b+c=2s$. La igualdad en (2.9) se satisface si, y solo si, $(s-a)=(s-b)=(s-c)$. Esto es, cuando $a=b=c$, lo cual corresponde a un triángulo equilátero. Así pues, al combinar la fórmula de Heron (2.7) con la desigualdad (2.9) obtenemos

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^2 \Rightarrow A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \sqrt{s\left(\frac{s}{3}\right)^3}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}}\,. \tag{2.10}$$

La expresión del área A máxima, $A_{\text{máx}}$, que se deduce a partir de (2.10), será entonces igual a $A_{\text{máx}}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ o, en términos del perímetro l, $A_{\text{máx}}=\frac{l^2}{12\sqrt{3}}$.

2.3 Problemas Propuestos

1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, asumiendo que $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $0 < x < 1 \ \Rightarrow \ 0 < \sqrt{x} < 1$.
b) $0 < x < 1 \ \Rightarrow \ 0 < \sqrt{x} < x$.
c) $0 < x < 1 \ \Rightarrow \ 0 < x^2 < 1$.
d) $x < y \ \Rightarrow \ x^2 < y^2$.
e) $x < y \ \Rightarrow \ x^3 < y^3$.
f) $x < y$ y $a > 0 \ \Rightarrow \ ax < ay$.
g) $0 < a < b \ \Rightarrow \ \frac{x}{a} > \frac{x}{b}$.
h) $2xy \leq x^2 + y^2$.
i) $\sqrt{x^2+y^2} = x + y$.

Respuestas:

a) Verdadera.
b) Falsa. Por ejemplo, si elegimos el valor $x = \frac{1}{4}$, entonces $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = x$.
c) Verdadera. Se sigue fácilmente del hecho que $x - x^2 = x(1-x) > 0$ por ser $0 < x < 1$.
d) Falsa. Por ejemplo, si tomamos $x = -3$ e $y = 2$, se tiene en efecto que $x < y$, pero $x^2 = (-3)^2 = 9 > 4 = (-2)^2 = y^2$.
e) Verdadera. Basta considerar los tres casos $0 \leq x < y$, $x < 0 < y$ y $x < y \leq 0$ y comprobar que en cada uno de ellos se cumple que $x^3 < y^3$.
f) Verdadera. Cuando los términos a ambos lados de una desigualdad se multiplican por un número positivo, la desigualdad no cambia. Sin embargo, si $x < y$ y $a < 0$, entonces $ax > ay$.
g) La veracidad de la afirmación depende del signo de x. Si $x > 0$, entonces la afirmación es verdadera. Si $x \leq 0$, la afirmación es falsa. Por ejemplo, si $x = -1$, $a = 1$ y $b = 2$, entonces $-1 < -\frac{1}{2}$.
h) Verdadera. Sabemos que se cumple la desigualdad $(x-y)^2 \geq 0$. Desarrollando esa desigualdad tendremos que $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$. Luego $x^2 + y^2 \geq 2xy$. También se sigue fácilmente de la desigualdad aritmético-geométrica (2.1) sin más que tomar $a = x^2$ y $b = y^2$.
i) Depende de cuáles sean x e y. Es falsa si $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Si fuera verdadera, al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad se cumpliría que $x^2 + y^2 = (x+y)^2$. Al desarrollar el miembro de la derecha tendríamos $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, lo que implicaría que $2xy = 0$. Pero eso no puede ocurrir si $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Ahora bien, quedaría por analizar qué ocurre si $x = 0$ o bien $y = 0$, pero no ambos. Si $x = 0$ e $y \neq 0$, entonces se tendría $\sqrt{y^2} = y$, lo cual es cierto si $y > 0$ pero no si $y < 0$. El caso $x \neq 0$ e $y = 0$ es análogo. Finalmente, si ambos $x = y = 0$, en ese caso la igualdad es verdadera, aunque resulta trivial.

2. Resuelve la inecuación $|x| > |x+1|$.

Respuesta: La desigualdad $|x| > |x+1|$ es equivalente a $|x| - |x+1| > 0$. Por definición de valor absoluto,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1, \\ -x-1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

de modo que

$$|x|-|x+1| \;=\; \begin{cases} -1 & \text{si } x \geq 0, \\ -2x-1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 2x+11 & \text{imposible que } x \geq 0 \text{ y } x < -1, \\ 1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Entonces, si $x \geq 0$, tenemos que $|x|-|x+1| = -1 < 0$. Para $-1 \leq x < 0$, se tiene $|x|-|x+1| = -2x-1$ de modo que $-2x-1 > 0$ solamente cuando $x < -\frac{1}{2}$. Pero como estamos en el intervalo $[-1,0)$ concluimos que la desigualdad es válida para cualquier $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$. Para todo $x < -1$, $|x|-|x+1| = 1 > 0$. Concluimos que la desigualdad $|x|-|x+1| > 0$ se cumple para cualquier $-\infty < x < -\frac{1}{2}$.

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|2x-5| \geq 5$ y $|2x-3| \geq 3$. *b)* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$.

Respuesta: *a)* Comienza considerando los casos que deben satisfacer $|2x-5|$ y $|2x-3|$. La variable x puede tomar los valores: $-\infty < x \leq 0$ o bien $5 \leq x < \infty$. *b)* Observa primeramente que debe cumplirse $x \neq 0$ y $x \neq 1$ para que la inecuación tenga sentido. Reduce el miembro izquierdo de la inecuación a una única fracción $\frac{1}{x(1-x)}$. Analiza los casos y concluye entonces que $0 < x < 1$.

4. Determina todos los números reales x que satisfacen la inecuación $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$.

Respuesta: Lo primero que debe observarse es que para que los binomios que hay en cada una de las raíces cuadradas, $3-x$ y $x+1$, no se hagan negativos, ha de tenerse $-1 \leq x \leq 3$. En ese intervalo de valores para x ambos binomios serán no negativos. Sin embargo, ese rango de valores para x no es la solución buscada. Por ejemplo, es fácil ver que si $x = 1$, aunque los argumentos de las raíces cuadradas son no negativos, la desigualdad de la inecuación no se cumple (se tendría $0 > \frac{1}{2}$, lo cual es falso). Por tanto, los valores buscados para x deben estar contenidos en $-1 \leq x \leq 3$. Al elevar al cuadrado cada uno de los miembros de la inecuación y simplificando se llega a que $(x-1)^2 > \frac{31}{64}$. Tomando la raíz cuadrada a ambos lados, se sigue que $|x-1| > \frac{\sqrt{31}}{8}$. Al analizar con cuidado esta última inecuación, y sin perder de vista la de partida, con objeto de evitar valores no factibles para x, se concluye que $-1 \leq x < \frac{8-\sqrt{31}}{8}$.

5. Considera dos puntos A y B separados entre sí por una distancia L. Sea P un punto interior situado en el segmento que conecta A y B. Si d_{AP} y d_{BP} denotan las distancias entre A y P, y entre B y P, respectivamente, demuestra que

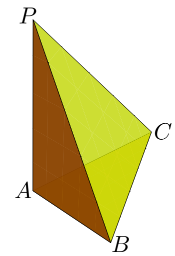
$$d_{AP} \cdot d_{BP} \leq \frac{L^2}{4}.$$

6. Demuestra la desigualdad triangular, es decir, que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente desigualdad que relaciona entre sí los valores absolutos $|x+y| \leq |x| + |y|$.

7. Dos carreteras rectas AA' y BB' son perpendiculares entre sí y se cruzan en un punto C. Las distancias AC y BC son respectivamente iguales a a y b. De los puntos A y B parten al mismo tiempo dos vehículos en dirección a C con velocidades v_1 y v_2, respectivamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo después de su partida la distancia entre los dos vehículos será mínima? ¿A qué es igual esa distancia mínima?

Respuesta: Tiempo al cabo del cual los dos vehículos están a una distancia mínima: $t_{\text{mín}} = \frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$. Distancia mínima: $d_{\text{mín}} = \frac{|av_2-bv_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$.

9. En un tetraedro trirrectángulo $PABC$, donde los tres ángulos del vértice A son ángulos rectos (ver figura a la derecha), la suma de las longitudes de sus seis aristas es igual a l. Encuentra el máximo volumen que puede tener dicho tetraedro, expresándolo en términos de la longitud total l, y determina qué condiciones deben cumplir sus aristas para alcanzar dicho volumen máximo.



Respuesta: Sean x, y y z las longitudes de las aristas del tetraedro que concurren en el vértice A. El volumen V de un tetraedro trirrectángulo viene dado por $V = \frac{xyz}{6}$. La suma de las longitudes de las seis aristas cumple que $x+y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2} = l$, es decir, está fijada. Usando de forma adecuada tanto la desigualdad aritmético-geométrica, como su versión generalizada con tres términos, se encuentra que el volumen máximo $V_{\text{máx}}$ del tetraedro trirrectángulo es $V_{\text{máx}} = \frac{l^3}{192\left(1+\sqrt{2}\right)^3}$ y se alcanza cuando las longitudes de las tres aristas x, y y z satisfacen que $x = y = z = \frac{l}{3\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

9. Un depósito semiesférico de radio R está lleno de agua. Un paralelepípedo de lados a y b y altura $h > R$ se sumerge dentro del depósito (ver la figura 2.5). Encuentra los valores de a y b para los cuales el volumen de agua desplazada (derramada fuera del depósito) sea máximo, así como dicho volumen. Expresa tus soluciones en términos de R.

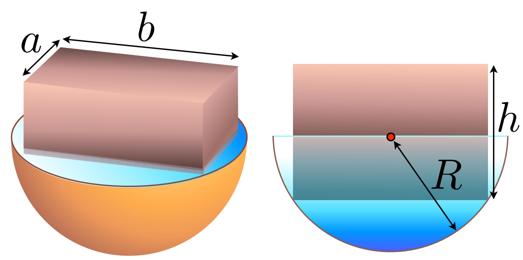


Figura 2.5: Depósito de agua semiesférico conteniendo un paralelepípedo de lados a y b y altura h.

Respuesta: Utilizando la siguiente versión de la desigualdad aritmético-geométrica $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$, para tres números reales positivos x, y y z, donde la igualdad se cumple si, y solo si, $x = y = z$, y aplicándola a la expresión para el volumen de agua desplazada, los valores buscados para a y b satisfacen $a = b = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. El volumen máximo de agua desplazada es $\frac{4R^3}{3\sqrt{3}}$.