PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS (2021). Adaptación del modelo de examen a causa del COVID19
Materia: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales
Esta prueba consta de dos propuestas (A y B) de seis preguntas cada una. El alumno debe contestar a un máximo de 4 problemas de la propuesta elegida. Todos los ejercicios puntúan 2.5 puntos. Se puede utilizar la calculadora.

Propuesta A

1. *Tenemos una provincia con 100 municipios, de los cuales 5 están confinados.*

a) Calcula la proporción de municipios de la provincia que no están confinados. (0.5 ptos)

b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres municipios al azar, sin repetición, ninguno resulte estar confinado. (1 pto)

c) Si elegimos a tres municipios al azar, sin repetición, y el primero y segundo están confinados, ¿cuál es la probabilidad de que el tercero esté confinado? (1 pto)

Solución:

a) $P(NC) = 95/100 = 0{,}95$ (0.5 ptos)

b) P(3 no confinado)= $P(1NC) * P(2NC/1NC) * P(3NC/(1NC \cap 2NC)) = 95/100 * 94/99 * 93/98 = 0{,}8559988$. (1 pto)

c) Sea 1C=Primero confinado; 2C=Segundo confinado; 3C=Tercer confinado;

$P(3C/(1C \cap 2C)) = 3/98 = 0{,}030612$. (1 pto)

2. *Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \leq t \leq 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.*

a) ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.75 ptos)

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (1 pto)

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.75 ptos)

Solución:

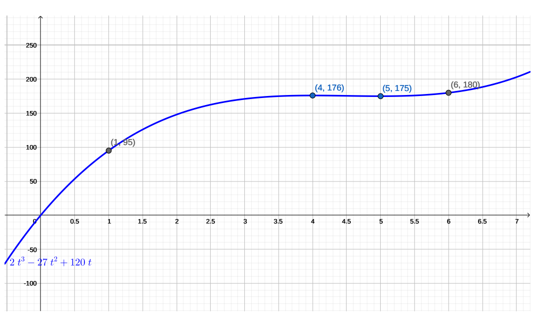
a) $C'(t) = 6t^2 - 54t + 120 \rightarrow C'(t) = 0$ para $t = 4$ y $t = 5$

Crece en (1,4), es decir, de 10 de la mañana a 2 de la tarde y en (5,6) que corresponde a la franja horaria que va de 3 de la tarde a 4 de la tarde. Decrece en (4,5), de 2 a 3 de la tarde. (0.75 ptos)

b) y c) $C''(t) = 12t - 54$, $C''(4) = 12{\cdot}4 - 54 = -6 < 0 \Rightarrow$máximo, $C''(5) = 12{\cdot}5 - 54 = 6 > 0 \Rightarrow$ *mínimo*.

Máximo relativo en 4 y mínimo relativo en 5 (0.25 ptos por el máximo relativo, 0.25 ptos por el mínimo relativo) $C(4) = 176$ y $C(5) = 175$. Pero si tenemos en cuenta los extremos tenemos que G(1)=95 y G(6)=180. La máxima venta será al final de la jornada y la mínima en la primera hora. (0.5 ptos por los dos valores)

El menor número de botellas es en la primera hora y el mayor en la última. con 9500 botellas y 18000 botellas. (0.75 ptos por los dos valores)



3. *Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & si\ x < -4 \\ 2x + 7 & si\ -4 \leq x < -2 \\ \frac{2x-4}{x^2-4} & si\ x \geq -2 \end{cases}$.

a) Estudia la continuidad en $x = 2$. (0.75 ptos) *b) Estudia la continuidad en $x = -4$. (1 pto)*

c) Calcula el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$. (0.75 ptos)

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & si\ x < -4 \\ 2x+7 & si - 4 \leq x < -2 \\ \frac{2x-4}{x^2-4} & si\ x \geq -2 \end{cases}$$

a) $x = 2 \in (-2, \infty)$ donde $D(f(x)) = \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. La función no existe en ese pto y presenta una discontinuidad evitable ya que $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x-4}{x^2-4}\right) = \frac{2(-2)-4}{(-2)^2-4} = \frac{0}{0}$ (0.75 ptos)

b) La función es continua en $x = -4 \Leftrightarrow \lim_{x\to -4} f(x) = f(-4)$. Para que exista el límite los límites laterales tienen que ser iguales: $\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{4}{x} = \frac{4}{-4} = -1$, $\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4}(2x+7) = 2\cdot(-4) + 7 = -1 \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = -1$ y

$f(-4) = 2\cdot(-4) + 7 = -1$. La función es continua en $x = -4$. (1 pto)

c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-4}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2/x-4/x^2}{1-4/x^2}\right) = 0$. (0.75 ptos)

4. *Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$.*

a) Resuelve la ecuación $X\cdot A - X\cdot B = C - I$ (siendo I la matriz identidad de orden 2). (1.5 ptos)

b) Calcula $B^2 - 2C$. (1 pto)

Solución:

a) $X\cdot A - X\cdot B = C - I \Leftrightarrow X\cdot(A - B) = C - I \Leftrightarrow X = (C - I)\cdot(A - B)^{-1} \Rightarrow$

$$X = \left(\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\right)^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A - B)^{-1}$ 0.5 ptos. Producto 0.5 ptos. Todo correcto 1.5 ptos.

b) $B^2 - 2C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 16 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -22 & 28 \end{pmatrix}$ (1 pto)

5. *En un centro de ocio hay 3 salas de cine: A, B y C. A una determinada sesión han acudido 225 personas. El número de espectadores de la sala C es el doble de la suma de espectadores de las salas A y B. También el número de espectadores de la sala C es 30 veces la diferencia entre los que acudieron a la sala B y los que fueron a la sala A.*

a) Plantea el sistema que nos permite averiguar cuántas personas acudieron a cada una de las salas de cine. (1,5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (1 pto)

Solución:

a)

x= número de persona que hay en la sala A

y= número de personas que hay en la sala B

z= número de personas que hay en la sala C

0.5 ptos por cada ecuación bien planteada

$$\begin{cases} x+y+z = 225 \\ z = 2(x+y) \\ z = 30(y-x) \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z = 225 \\ 2x+2y-z = 0 \\ 30x-30y+z = 0 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x+y+z=225 \\ x+y=75 \\ x=35 \end{cases}$ soluciones: x= 35, y=40, z= 150

0.5 ptos por el desarrollo y 0.5 pto por la solución correcta del sistema planteado en el apartado a)

6. *Se considera una muestra aleatoria de los precios de 10 vuelos : 80, 65, 72, 74, 75, 81, 82, 84, 87, 90 euros respectivamente.*

a) Sabiendo que el precio del vuelo sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ *euros, halla un intervalo de confianza para el precio medio del vuelo con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)*

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo con el mismo nivel de confianza. (0.75 ptos)

c) ¿Crees que la medida del precio del vuelo puede ser 100 euros con un nivel de confianza del 90 %? (0.5 ptos)

Solución:

a) La media muestral es:

$\bar{x} = \frac{65+72+74+75+80+81+82+84+87+90}{10} = 79 \; euros$ (**0.25 ptos)**

Del enunciado se deduce: $n = 10$ y $\sigma = 20 \; euros$

1- $\alpha = 0{,}95 \;\Rightarrow\; Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1,96 **(0.25 ptos)**

IC= $(\; \bar{x} \; - \; Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} \; + \; Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;)$ (**0.25 ptos)**

IC= (79 - 1.96$\frac{20}{\sqrt{10}}$, $\quad 79 \; + \; 1{,}96 \; \frac{20}{\sqrt{10}}$) = (66.604, 91.396) **(0.5 ptos)**

b) Aumentando el tamaño de la muestra. (0.75ptos)

c) Si 100 no está dentro del intervalo al 95 % por tanto tampoco estará en el del 90 %. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Propuesta B

1. *Una empresa de miguelitos de La Roda puede hacer dos tipos de miguelitos: los originales de crema y de chocolate. La empresa tiene la obligación de hacer diariamente entre 4000 y 8000 cajas de miguelitos de crema, y además entre 2000 y 5000 de chocolate. Además, el número de cajas de crema debe ser al menos el doble que el número de cajas de chocolate. La empresa obtiene un beneficio de 1.5 euros por cada caja de crema y 1 euro por cada caja de chocolate. La empresa trata de averiguar cuál es el número de cajas de cada tipo que maximiza los beneficios.*

a) Expresa la función objetivo. (0.5 ptos)

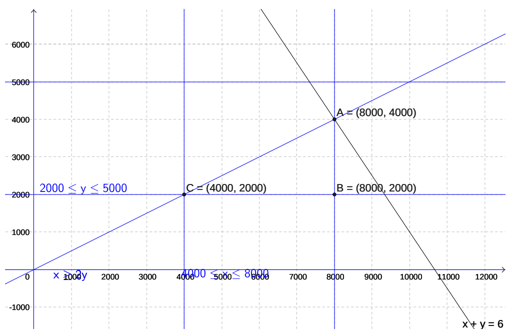
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 ptos)

c) Halla el número de cajas de cada tipo que debe hacer diariamente para que el beneficio sea máximo. (0.75 ptos)

Solución:

a) Llamando x a los de crema e y a los de chocolate, la función objetivo será: $Z\ = 1.5x\ + y$.(0.5 ptos)

b) Las restricciones del problema: $4000 \leq x \leq 8000$; $2000 \leq y \leq 5000$; $x \geq 2\,y\ \rightarrow\ y \leq \frac{1}{2}\,x$. (0.75 ptos) por restricciones y (0.5 ptos) por la región factible.



c) Donde A (8000 , 4000) ; B (8000 , 2000) ; C (4000 , 2000) (0.5 ptos por los vértices) y tenemos que Z (A) = 8000*1.5 + 4000*1 = 16000

Luego la solución es realizar 8000 de crema y 4000 de chocolate. (0.25 ptos por óptimo)

2. *En una empresa se producen tres tipos de productos de acuerdo a los siguiente porcentajes: 60 % son sillas, 30 % son mesas y el resto estanterías. Además sabemos que el 9 % de las sillas tienen algún defecto, el 20 % de las mesas tienen algún defecto y el 6 % de las estanterías tienen algún defecto.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto elegido al azar sea una silla y tenga algún defecto? (0.5 ptos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto realizado en la fábrica tenga algún defecto? (1 pto)

c) Si un producto realizado en la fábrica tiene algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mesa? (1 pto)

Solución:

S=Silla; M=Mesa; E=Estantería;

D=defecto

P(S)=0.6; P(M)=0.3; P(E)=0.1

P(D/S)=0.09; P(D/M)=0.2; P(D/E)=0.06

a)

$P(S \cap D) = P(D/S) * P(S)$ =0.09*0.6=0.054 (0.5 ptos)

b)

$P(D) = P(D \cap S) + P(D \cap M) + P(D \cap E)$=
=$P(D/S) * P(S) + P(D/M)P(M) + P(D/E) * P(E)$= 0.6*0.09+0.3*0.2+0.1*0.06=0.12 (1 pto)

c)

$P(M/D) = P(M \cap D)/P(D) = (P(D/M) * P(M))/P(D)$=(0.2*0.3)/0.12=0.5

(1 pto)

3. *Una óptica dispone de tres modelos de gafas de sol. Cada unidad del modelo A se vende a 90 euros, el precio del modelo B es 110 euros y por el modelo C se pagan 130 euros. Se sabe que el año pasado la óptica ingresó 84000 euros por la venta de gafas de los modelos A, B y C. El modelo A se vendió tres veces más que el C, y el B se vendió tanto como el A y el C juntos.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar las unidades que se vendieron de cada modelo de gafas. (1.5 ptos).

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (1 pto)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ unidades de A; $y \equiv$ unidades de B; $z \equiv$ unidades de C

$$\begin{cases} 90x + 110y + 130z = 84000 \\ x = 3z \\ y = x + z \end{cases}$$

(0.5 ptos por cada ecuación bien planteada)

b)

Con solución $(x, y, z) = (300, 400, 100)$ unidades.

Se venden 300 unidades del modelo A, 400 del modelo B y 100 del modelo C.

(0.5 ptos por el desarrollo de la resolución)

(0.5 ptos por la solución correcta)

4. *En la función,* $f(x) = -2x^3 + 18x^2$ *, se pide:*

a) Calcular los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función. (1.5 ptos)

b) Averigua los ptos de inflexión. (0.5 ptos)

c) Estudiar la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad). (0.5 ptos)

Solución:

$$f(x) = -2x^3 + 18x^2$$

a) Máximos y mínimos si $f'(x) = 0$ $f'(x) = -6x^2 + 36x$, $f'(x) = 0$ para $x = 0$ y $x = 6$ $f''(x) = -12x + 36$, sustituyendo $f''(0) = -12 \cdot 0 + 36 = 36 > 0$ que nos indica un mínimo relativo (0.5 ptos) y $f''(6) = -12 \cdot 6 + 36 = -36 < 0$ que nos dice que es un máximo relativo (0.5 ptos). Los ptos:

$f(0) = -2(0)^3 + 18 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow P(0,\ 0)$ y $f(6) = -2 \cdot 6^3 + 18 \cdot 6^2 = 216 \Rightarrow P(6,\ 216)$ (0.25 ptos cada valor)

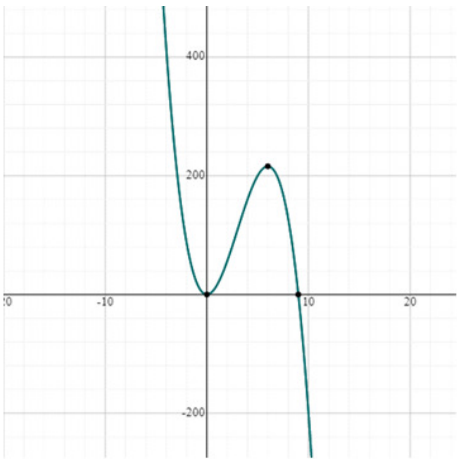
b) Los posibles ptos de inflexión cumplen que la segunda derivada es igual a 0 y $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$f'''(x) = -12 \ \Rightarrow f'''(3) = -12 \neq 0$ lo que nos confirma que es pto de inflexión.

$f(0) = -2 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 = 108 \Rightarrow P(3,\ 108)$ (0.5 ptos)

c)

El estudio de concavidad viene dado por el signo de la segunda derivada: $f''(x) = 0$ para $x = 0$ y $f''(x) > 0$ para el intervalo $(-\infty, 0)$ que es cóncava (si se le llama cóncava a la forma $\cup$) y $f''(x) < 0$ en $(0, \infty)$ y será convexa ($\cap$) (0.5 ptos)



5. *La función $v(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 8$, $1 \leq t \leq 7$, representa la velocidad del viento, medida en Km/h, registrada durante siete días en una estación meteorológica y t representa el tiempo medido en días.*

a) ¿Qué velocidad se registró el primer día (t=1)? (0.25 ptos)

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la velocidad del viento. (1.25 ptos)

c) ¿Cuál fue la velocidad máxima del viento y en qué día se produjo? (0.5 ptos)

d) ¿Cuándo se alcanzó la mínima velocidad y cuál fue su valor? (0.5 ptos)

a) v(t)=t^3-12t^2+36t+8 , v(1)=33 km/h (0.25 ptos)

b) $v'(t) = 3t^2 - 24t + 36$ (0,25 *ptos*)

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \Rightarrow t = 2 \;\; y \;\; t = 6$ (0,25 *ptos*)

En el intervalo $(1,2)$, $v'(t) > 0 \Rightarrow$ *La velocidad crece en el intervalo* $(1,2)$ (0,25 *ptos*)

En el intervalo $(2,6)$, $v'(t) < 0 \Rightarrow$ *La velocidad decrece en* $(2,6)$ (0,25 *ptos*)

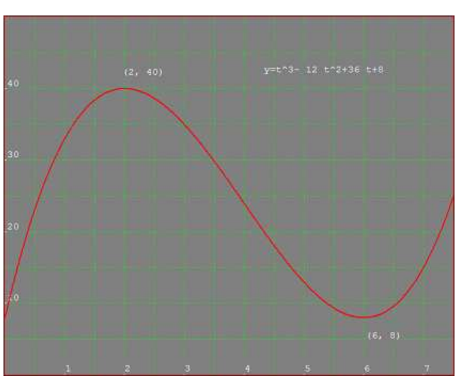
En el intervalo $(6,7)$, $v'(t) > 0 \Rightarrow$ *La velocidad crece en* $(6,7)$ (0,25 *ptos*)

c) $v''(t) = 6t - 24$ (0,25 *ptos*)

$v''(t=2) = 12 - 24 = -12 < 0 \Rightarrow$ $(2,\ v(2) = 40)$ es un máximo relativo de la función el segundo día el viento alcanza su máxima velocidad de 40 km/h (0.25 ptos)

d) $v''(t=6) = 36 - 24 = 12 > 0 \Rightarrow$ $(6,\ v(6) = 8)$ es un mínimo relativo de la función

El sexto día el viento alcanza la mínima velocidad 8 km/h (0.5 ptos)



6. *Una fábrica produce cables de acero, cuya resistencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 10$ KJ/m^3.Se tomó una muestra aleatoria de 100 piezas y mediante un estudio estadístico se obtuvo un intervalo de confianza (898,04 , 901,96) para la resistencia media de los cables de acero producidos en la fábrica.*

a) Calcula el valor de la resistencia media de las 100 piezas de la muestra. (0.75 ptos)

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (1.25 ptos)

c) ¿Crees que la resistencia media puede ser 900 KJ/m^3 con un nivel de confianza del 95 %? (0.5 ptos)

Solución:

a) El intervalo de confianza es simétrico respecto de la media muestral. Por tanto la media muestral es: $\bar{x} = \frac{898{,}04+901{,}96}{2} = 900$ KJ/m^3 (0.75 ptos)

b)

$$IC = \left(\bar{x} \ - z_{\frac{\alpha}{2}} \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \ = \left(900 - z_{\frac{\alpha}{2}} \ \frac{10}{\sqrt{100}} \ , \ 900 + z_{\frac{\alpha}{2}} \ \frac{10}{\sqrt{100}}\right) \ = \ \left(900 - z_{\frac{\alpha}{2}}, \ 900 \ + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \\ = (898{,}04 \ , \ 901,96)$$

$900 - z_{\frac{\alpha}{2}} = 898{,}04 \Rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow$ El nivel de confianza es del 95 %

Escribir la fórmula del intervalo de confianza. . . .0.25 ptos

Escribir la fórmula del intervalo de confianza con los datos del problema. . . .0.25 ptos

Igualar el intervalo obtenido anteriormente y el dado. . . . . . 0.25 ptos

Obtener $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ . . . . . . 0.25 ptos

Obtener que en nivel de confianza es del 95 %.......0.25 ptos

c) Sí, ya que 90 está dentro del intervalo de confianza al 95 %. (0.5 ptos)

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767